1. 수렴과 발산

$$\left.\begin{array}{ll} 1,2,3,4 \dots n \cdots & \text{발산}(\infty) \\ -1,-2,-3,-4 \cdots & \text{발산}(-\infty) \\ 1,-1,1,-1 \cdots & \text{진동} \\ 1,-2,3,-4 \cdots & \text{진동 발산} \end{array}\right) \text{극한값 없다.}$$

$$\left.\begin{array}{ll} 1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}\dots\frac{1}{n}\dots 0 & (\text{수렴}) \\ 1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4}\dots 0 & (\text{수렴}) \end{array}\right) \text{극한값 존재}$$

* 무한수열 $a_1, a_2, a_3, a_4 \dots$ 에서

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \to \alpha$ 에 수렴

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty, -\infty$ 진동 — 극한값 없다.

진동발산

2. 수렴하는 수열의 극한

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ 이면

(1) $\lim_{n\to\infty} ka_n = k\alpha$

(2) $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \alpha\beta$

(4) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta} (\beta \neq 0)$

(5) $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \alpha$

*$a_n < b_n$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta \Rightarrow \alpha \leqq \beta$

*$a_n \leqq P_n \leqq b_n$ 이고 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ 이면 $\lim_{n\to\infty} P_n = \alpha$

3. 계산 $\left(\frac{\infty}{\infty}\text{꼴}\right)$

분모 > 분자 : 0

분모 = 분자 : 최고차계수비

분모 < 분자 : $\pm\infty$

*$\infty + \infty = \infty$ $\infty \cdot \infty = \infty$

*$\infty - \infty$: 앞 > 뒤 : ∞

앞 < 뒤 : $-\infty$

앞 = 뒤 : $\frac{\infty}{\infty}$꼴

* $0 \times \infty \neq 0$, $c \cdot \infty = \infty$ (단 $c \neq 0$)

$$\lim_{n\to\infty} n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot n^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty} n^2 = 0 \cdot \infty = 0$$

* $0 \times$ 유한범위$=0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n^2+3n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n}} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+5n}{n^2+3n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{5}{n}}{1+\frac{3}{n}} = 2$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n+3} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}} = \frac{1}{0.00\dots1} = \infty$$

$\lim_{n\to\infty}(n+n^2) = \infty$ $\lim_{n\to\infty}(n^2-n) = \infty$

$\lim_{n\to\infty}(n \cdot 3n^2) = \infty$ $\lim_{n\to\infty}(n-n^2) = -\infty$

예제1

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n) = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}-n}{1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{1}{2}$$

예제2

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}sin\frac{n\pi}{2} = ?$$

$$\Rightarrow -1 \leqq \sin\frac{n\pi}{2} \leqq 1$$

$$-\frac{1}{n} \leqq \sin\frac{n}{2}\pi \leqq \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) \leqq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}sin\frac{n}{2}\pi \leqq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} \qquad \therefore 0$$